Τετάρτη 27/02/2019

$H \leq G \Leftrightarrow$ (i) $H \subseteq G$

(ii) $\forall a, b \in H \Rightarrow a \cdot b \in H$

Η υποομάδα της G. (iii) $1 \in H$

(iv) αν $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

$H \leq G \Leftrightarrow$ (i) $H \subseteq G$

(ii) $H \neq \phi$

(iii) αν $a, b \in H \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H$.

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι το $U_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$ είναι υποομάδα του $\mathbb{C}^*$

i) $U_n \subset \mathbb{C}$. Έστω ότι κάποιο στοιχείο του U_n είναι μηδέν. $\Rightarrow 0 = 1$ Άτοπο

Άρα $U_n \leq \mathbb{C}^*$

ii) $1 \in U_n$ αφού $1^n = 1$ Άρα $U_n \neq \phi$.

iii) Έστω $a, b \in U_n \Rightarrow a^n = 1$, $b^n = 1$

$(ab^{-1})^n = \underbrace{(a \cdot b^{-1})(a \cdot b^{-1})(a \cdot b^{-1}) \ldots}_{\text{n-φορές}} = a^n (b^{-1})^n = 1 \cdot (b^n)^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = 1 \Rightarrow (a \cdot b^{-1})^n = 1 \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in U_n$

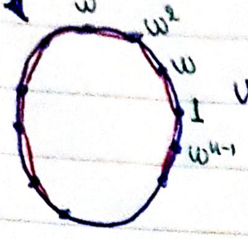
Άρα $U_n \leq \mathbb{C}^*$

$\boxed{(a\cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ΜΟΝΟ ΕΑΝ Η ΟΜΑΔΑ ΕΙΝΑΙ ΑΒΕΛΙΑΝΗ}}$

κανονικό ν-γωνο

$U_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \} \leq \mathbb{C}^*$

$U_n = \{ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \mid 0 \leq k \leq n-1 \}$.



$\omega = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

$\omega^2 = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i\eta\mu\left(\frac{4\pi}{n}\right)$ $\qquad U_n = \langle \omega \rangle = \langle \omega^{-1} \rangle$

Ο αντίστροφος του ω^{n-1} είναι το ω^{-1}

$a \in G$: $\quad \langle a \rangle = \{ a^n \mid n \in \mathbb{Z} \} \leq G$

Η κυκλική υποομάδα που παράγεται από το a.

Ορισμός: Μια ομάδα G λέγεται κυκλική αν υπάρχει $a \in G$ τέτοιο ώστε $G = \langle a \rangle$.

Άσκηση:

$U(\mathbb{Z}_8) = \{ [1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8 \}$

Ποια ομάδα παράγει το 1.

$\langle [1]_8 \rangle = \{ [1]_8 \} \neq U(\mathbb{Z}_8)$ (παίρνω δυνάμεις του 1).

$\langle [3]_8 \rangle = \{ [1]_8, [3]_8 \} \neq U(\mathbb{Z}_8)$ (παίρνω δυνάμεις του 3).

$\langle [5]_8 \rangle = \{ [1]_8, [5]_8 \} \neq U(\mathbb{Z}_8)$ (παίρνω δυνάμεις του 5).

$\langle [7]_8 \rangle = \{ [1]_8, [7]_8 \} \neq U(\mathbb{Z}_8)$ (παίρνω δυνάμεις του 7).

Άρα η $U(\mathbb{Z}_8)$ δεν είναι κυκλική.

Άσκηση: Δείξτε ότι η ομάδα $U(\mathbb{Z}_{11})$ είναι κυκλική.

$\langle [1]_{11} \rangle = \{ [1]_{11} \}$

$\langle [2]_{11} \rangle = \{ [1]_{11}, [2]_{11}, [4]_{11}, [8]_{11}, [5]_{11}, [10]_{11}, [9]_{11}, [7]_{11}, [3]_{11}, [6]_{11} \} = U(\mathbb{Z}_{11})$

Η $U(\mathbb{Z}_{11})$ κυκλική αφού παράγεται από το $\langle [2]_{11} \rangle$ και το 2 ονομάζεται πρωταρχική ρίζα.

→ Το $U(\mathbb{Z}_{15})$ δεν είναι κυκλική αφού δεν είναι δύναμη πρώτου.

→ προσθέσεων
↳ όχι δυνάμεις αλλά πολλαπλάσια

Το $\mathbb{Z}$ είναι κυκλική ομάδα;

Ναι γιατί το $\mathbb{Z}$ παράγεται από το 1. Δηλαδή $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle =$

$= \{ n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z} \} = \{ n \mid n \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z}$.

Το 2 παράγει τους άρτιους και το 0.
Το -1 παράγει το $\mathbb{Z} = \langle -1 \rangle$.

Το $\mathbb{Z}_n$ είναι κυκλική ομάδα; (προσθέσεων).
Το 1 παράγει την $\mathbb{Z}_n$
$\mathbb{Z}_n = \langle [1]_n \rangle$. κυκλική

Το $\mathbb{Q}$ είναι κυκλική ομάδα; (προσθέσεων).

Έστω $\mathbb{Q}$ κυκλική $\mathbb{Q} = \langle \frac{k}{\lambda} \mid k, \lambda \in \mathbb{Z}$ με μ.κ.δ$(k,\lambda) = 1 \}$.

$= \{ \dots -\frac{k}{\lambda}, -\frac{2k}{\lambda}, -\frac{k}{\lambda}, 0, \frac{k}{\lambda}, \frac{2k}{\lambda}, \frac{3k}{\lambda}$

Άτοπο, άρα $\mathbb{Q}$ δεν είναι κυκλική

Το $\mathbb{Q}^*$ είναι κυκλική ομάδα;

$\langle \frac{k}{\lambda} \rangle = \{ (\frac{k}{\lambda})^n \mid n \in \mathbb{Z} \} = \{ \dots, (\frac{\lambda}{k})^2, (\frac{\lambda}{k}), 1, (\frac{k}{\lambda}), (\frac{k}{\lambda})^2, \dots (\frac{k}{\lambda})^n \}$

- $(k/\lambda) > 0 \Rightarrow$ λείπουν οι αρνητικοί.
- $(k/\lambda) < 0 \Rightarrow$

Άσκηση: Έστω H_1, H_2 υποομάδες μιας ομάδας G. Δ.ό $H_1 \cap H_2$ είναι υποομάδα της G.

i) $H_1 \leq G$ $\quad H_1 \subset G$ $\quad H_1 \cap H_2 \subseteq H_1 \subseteq G$
$H_2 \leq G$ $\quad H_2 \subset G$

ii) $\left.\begin{array}{l} H_1 \leq G \Rightarrow 1 \in H_1 \\ H_2 \leq G \Rightarrow 1 \in H_2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \in H_1 \cap H_2$

Άρα $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$

iii) Έστω $a,b \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow a,b \in H_1 \leq G \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H_1$
$a,b \in H_2 \leq G \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H_2$ $\Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H_1 \cap H_2$

Άρα $H_1 \cap H_2 \leq G$

Σπίτι

Άσκηση: Έστω H_1, H_2 υποομάδες μιας ομάδας G.
Δ.ό. η $H_1 \cup H_2$ είναι υποομάδα της G αν-ν $H_1 \subseteq H_2$ ή $H_2 \subseteq H_1$

ΟΜΑΔΑ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ

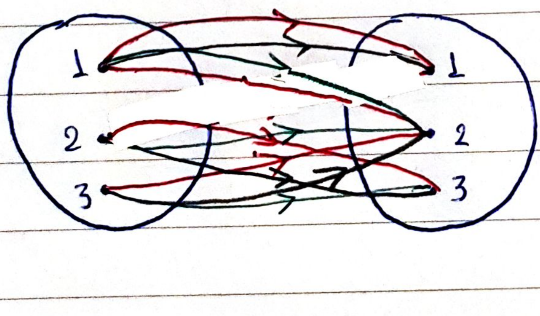
Ορισμός: Μια απεικόνιση f: από το σύνολο A στο σύνολο B λέγεται ένα προς ένα (1-1) αν ισχύει:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \text{ ή } (\text{Αν } a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)).$$

Ορισμός: Μια απεικόνιση f από το σύνολο A στο σύνολο B λέγεται επί αν για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $f(a) = b$.

Ορισμός: Μια απεικόνιση f από το σύνολο A στο σύνολο A λέγεται μετάθεση αν είναι ένα προς ένα και επί.

Παραδείγματα:



Δεν είναι 1-1 ούτε επί

Δεν είναι απεικόνιση